https://www.cm-physmath.net/

revisione
25 gennaio 2024

Esistenza e determinazione di

soluzioni particolari integro-esponenziali

dell'equazione **D**ifferenziale **O**rdinaria **L**ineare (**DOL**)
di Laplace del 2° ordine

claudio magno

CM Portable PHYS Notebook Series™

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Edward Lindsay Ince (1891-1941)

INDICE

Introduzione p. III

Esistenza di soluzioni particolari integro-esponenziali dell'equazione DOL di Laplace del 2º ordine p. 1

Riepilogo operativo p. 7

Esempî p. 8-9

- Esempio 1
- Esempio 2
- Esempio 3

Bibliografia p. 10

INTRODUZIONE

Questa è una breve esposizione di alcuni dettagli elementari di calcolo per un controllo delle condizioni di *esistenza in* $\mathbb{R}$ di soluzioni particolari dell'equazione Differenziale Ordinaria Lineare (DOL) di Laplace del 2º ordine, quella che sembrerebbe aver ispirato L. Euler a tentarne un'estensione con la sua celebre

$$a_0(px+q)^n y^{(n)} + a_1(px+q)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}(px+q)y' + a_n y = \phi(x),$$

dove, $\{a_0, \ldots, a_n, p, q\}$ è un insieme di $n+3$ costanti e $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathfrak{D})$, con $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R}$, è una funzione nota. A mio avviso, però, la DOL di Laplace ha rilevanza e ramificazioni di gran lunga più profonde dell'equazione di Euler, risultando connessa, essenzialmente, attraverso la (quasi) onnipresente *Funzione Ipergeometrica Gaussiana*, ${}_2F_1$, alle *Funzioni Speciali* più ricorrenti (e importanti) nei modelli della Fisica Teorica (*Funzione* Γ, *Polinomi Ortogonali*, *Funzioni di Bessel*, etc.) e alla loro analisi sia *locale* che *asintotica* (metodo dello *steepest descent*, *Lemma di Watson*, etc.). Una sintesi operativa della DOL di Laplace del 2º ordine è contenuta anche nel math-notebook EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 2º ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI - METODI DI INTEGRAZIONE; qui, indirettamente, è indicata qualche direzione di studio per approfondimento ulteriori.

I riferimenti bibliografici sono ridotti all'osso ('ossi' classici, consolidati e affidabili, comunque). Personalmente, quando mi è insorto dubbî o ho dovuto rivedere qualche dettaglio fine, mi sono lasciato guidare da [2], [1], [3], [4], [5], [6] e [13], secondo necessità, senza voler far torto ad alcuno (né certamente sarei io a potermelo permettere …).

C M

Esistenza di soluzioni particolari integro-esponenziali dell'equazione DOL di Laplace del 2º ordine

Si consideri l'Equazione Differenziale Ordinaria Lineare (DOL) in forma *omogenea* e *canonica*,

$$(a_0 x + b_0) y'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_2 x + b_2) y = 0, \tag{1}$$

dove, $\{a_j, b_j\}_{j=0,1,2} \subset \mathbb{R}$ e, senza perdita di generalità, con $a_0 > 0$. Nota anche come *Equazione Differenziale Ordinaria Lineare di Laplace* del 2º ordine, essa possiede una *singolarità regolare* (o *fuchsiana* (‡)) in corrispondenza di $x = -b_0/a_0$.

Se i coefficienti a_j fossero tutti nulli, gli integrali particolari sarebbero rappresentabili mediante funzioni esponenziali. Ciò suggerisce di indagare *se* (i.e., *sotto quali condizioni*) *possano esistere* soluzioni particolari *reali* dell'Eq. (1) della classe degli *Integrali di Laplace*, i.e., della forma

$$x \mapsto y_1(x) := \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta x t} \phi(t)\, dt, \tag{2}$$

assumendo $\alpha < \beta$. Per tale forma, una volta assegnato il valore della costante $\eta \in \{1, i\}$ in modo *opportuno*, devono essere determinati sia la funzione $t \mapsto \phi(t)$ sia l'intervallo di integrazione $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Le derivate vs. x, y_1' e y_1'' di y_1 sotto il segno di integrale (*regola di Leibniz*),

$$y_1'(x) \equiv \frac{d}{dx} \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta x t} \phi(t)\, dt = \int_{t=\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\eta x t} \right) \phi(t)\, dt = \eta t y_1(x),$$

$$y_1''(x) \equiv \frac{d}{dx} y_1'(x) \equiv \eta t \frac{d}{dx} y_1(x) = \eta^2 t^2 y_1(x),$$

servono alla definizione dell'*operatore differenziale ordinario lineare* del 2º ordine

$$\mathscr{L}(x) := (a_0 x + b_0) \frac{d^2}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{d}{dx} + (a_2 x + b_2). \tag{3}$$

Quindi, se $y = y_1(x)$ è un integrale particolare dell'Eq. (1), risulta

$$\begin{aligned} 0 \equiv \mathscr{L} y_1(x) &= \int_{t=\alpha}^{\beta} \left((a_0 x + b_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a_1 x + b_1) \frac{\partial}{\partial x} + (a_2 x + b_2) \right) (e^{\eta x t} \phi(t))\, dt \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta x t} (\eta^2 (a_0 x + b_0) t^2 + \eta (a_1 x + b_1) t + a_2 x + b_2) \phi(t)\, dt \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta x t} (x(\eta^2 a_0 t^2 + \eta a_1 t + a_2) + (\eta^2 b_0 t^2 + \eta b_1 t + b_2)) \phi(t)\, dt \\ &\equiv \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta x t} (x A(t) + B(t)) \phi(t)\, dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Nell'integrazione, x resta un *parametro inerte* e sono state introdotte le definizioni evidenti

$$A(t) := \eta^2 a_0 t^2 + \eta a_1 t + a_2, \qquad B(t) := \eta^2 b_0 t^2 + \eta b_1 t + b_2. \tag{4.1}$$

(‡) Circa la tipologia delle singolarità analitiche, si veda, e.g., il math-notebook [20], P. 8-10.

Continuando la riduzione dell'Eq. (4) (t costituisce la *variabile muta* di integrazione), si scrive

$$0 \equiv \int_{t=\alpha}^{\beta} (xe^{\eta xt}A(t) + e^{\eta xt}B(t))\phi(t)dt \equiv \int_{t=\alpha}^{\beta} \left(\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}e^{\eta xt}\right)A(t) + e^{\eta xt}B(t)\right)\phi(t)dt,$$

$$\equiv \frac{1}{\eta}\left(e^{\eta xt}A(t)\phi(t)\Big|_{t=\alpha}^{\beta} - \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta xt}\frac{d}{dt}(A(t)\phi(t))dt \right) + \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta xt}B(t)\phi(t)dt$$

$$\equiv \int_{t=\alpha}^{\beta} e^{\eta xt}\left(B(t)\phi(t) - \frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}(A(t)\phi(t)) \right)dt + \frac{1}{\eta}e^{\eta xt}A(t)\phi(t)\Big|_{t=\alpha}^{\beta},$$

così da determinare le condizioni *sufficienti* simultanee

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(A(t)\phi(t)) = \eta B(t)\phi(t), & (5.1)\\ A(t)\phi(t)\Big|_{t=\alpha}^{\beta} \equiv A(\beta)\phi(\beta) - A(\alpha)\phi(\alpha) = 0. & (5.2) \end{cases}$$

Il calcolo della derivata nel membro sinistro dell'Eq. (5.1), $A'(t)\phi(t) + A(t)\phi'(t) = \eta B(t)\phi(t)$, e la divisione successiva per $A(t)\phi(t) \neq 0$ forniscono l'uguaglianza

$$\frac{A'(t)}{A(t)} + \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \equiv \frac{d}{dx}ln|A(t)\phi(t)| = \eta\frac{B(t)}{A(t)} . \tag{6}$$

Dall'integrazione indefinita dei termini nei membri dell'Eq. (6), seguíta dall'esponenziamento dei termini risultanti, si trova

$$\phi(t) = \frac{\kappa e^{\eta\int\frac{B(t)}{A(t)}dt}}{A(t)} = \frac{\kappa e^{\eta(b_0/a_0)t + \int\frac{\eta^2\lambda t + \eta\mu}{A(t)}dt}}{A(t)} \equiv \frac{\kappa e^{\eta(b_0/a_0)t + I(t)}}{A(t)} . \tag{7}$$

Nell'Eq. (7), $\kappa \neq 0$ è la costante *arbitraria* di integrazione mentre le notazioni sintetiche

$$I(t) := \int\frac{\eta^2\lambda t + \eta\mu}{A(t)}dt, \qquad \lambda := \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0}, \qquad \mu := \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0}, \tag{8}$$

provengono dalla divisione tra i polinomi (4.1),

$$\frac{B(t)}{A(t)} = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\eta(a_0 b_1 - a_1 b_0)t + a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0(\eta^2 a_0 t^2 + \eta a_1 t + a_2)} \equiv \frac{b_0}{a_0} + \frac{\eta\lambda t + \mu}{A(t)} .$$

L'espressione (7) di $\phi(t)$, sostituita nell'Eq. (5.2), ne specifica la forma *minima sufficiente*,

$$\kappa e^{I(t)}\Big|_{\alpha}^{\beta} \equiv \kappa(e^{I(\beta)} - e^{I(\alpha)}) = 0. \tag{9}$$

La presenza di κ nell'Eq. (9), chiaramente superflua, viene mantenuta per includere, nel seguito, costanti moltiplicative ininfluenti.
Poiché $\alpha \neq \beta$, è chiaro che la validità della condizione (9) richiede che la forma esplicita delle funzioni primitive $I(t)$ diverga *logaritmicamente* a $-\infty$ *sia* per $t \to \alpha$ *che* per $t \to \beta$.
Esplicitando l'integrale indefinito $I(t)$, si ha

$$I(t) \equiv \int\frac{((\lambda/(2a_0))(2\eta^2 a_0 t + \eta a_1) + \eta\mu - \eta a_1\lambda/(2a_0)}{\eta^2 a_0 t^2 + \eta a_1 t + a_2}dt$$

$$\equiv \frac{\lambda}{2a_0}\int \frac{2\eta^2 a_0 t+\eta a_1}{\eta^2 a_0 t^2+\eta a_1 t+a_2}\,dt+\eta\,(\mu-a_1\lambda/(2a_0))\int \frac{dt}{\eta^2 a_0 t^2+\eta a_1 t+a_2}\ . \tag{10}$$

Ora, fissata la definizione generale $\eta^2(a_1^2-4a_0a_2):=\varDelta$,

I. sia assegnato $\eta\equiv 1$. Segue che

$$A(t)\equiv a_0t^2+a_1t+a_2\equiv \frac{1}{4a_0}(2a_0t+a_1+\varDelta^{1/2})(2a_0t+a_1-\varDelta^{1/2})\,, \tag{11}$$

con $\varDelta\equiv a_1^2-4a_0a_2$. In questo caso, l'espressione (10) diventa,

$$I(t)\equiv \frac{\lambda}{2a_0}\int \frac{2a_0t+a_1}{a_0t^2+a_1t+a_2}\,dt+\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{2a_0}\int \frac{dt}{a_0t^2+a_1t+a_2}\ . \tag{12}$$

Trascurando le costanti additive arbitrarie di integrazione (incluse quelle eventuali di origine logaritmica), la parte *variabile* dell'integrale (12) vale, rispettivamente,

- per $\varDelta<0$,

$$I(t)=\frac{\lambda}{2a_0}\,ln\left|a_0t^2+a_1t+a_2\right|+\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{a_0(-\varDelta)^{1/2}}\,tan^{-1}\frac{2a_0t+a_1}{(-\varDelta)^{1/2}}\,; \tag{12.1}$$

- per $\varDelta=0$,

$$I(t)=\frac{\lambda}{a_0}\,ln\left|2a_0t+a_1\right|-\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{a_0(2a_0t+a_1)}\ ; \tag{12.2}$$

- per $\varDelta>0$,

$$\begin{aligned} I(t)&=\frac{\lambda}{2a_0}\,ln\left|a_0t^2+a_1t+a_2\right|+\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}\,ln\left|\frac{2a_0t+a_1-\varDelta^{1/2}}{2a_0t+a_1+\varDelta^{1/2}}\right| \\ &\equiv ln\left(\left|2a_0t+a_1-\varDelta^{1/2}\right|^{\frac{\lambda}{2a_0}+\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}}\cdot\left|2a_0t+a_1+\varDelta^{1/2}\right|^{\frac{\lambda}{2a_0}-\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}}\right)\ . \end{aligned} \tag{12.3}$$

Il controllo delle rappresentazioni possibili di $I(t)$ in $\mathbb{R}$ porta subito alla conclusione che i casi corrispondenti a $\varDelta\le 0$ *non possono* soddisfare la condizione (9). Infatti, per $\varDelta<0$, l'addendo logaritmico in $I(t)$ non ha divergenze *negative* (l'addendo arco-tangente è limitato in $\mathbb{R}$) mentre, per $\varDelta=0$, l'*unico* valore singolare, $t=-a_1/(2a_0)$, introduce una *divergenza non-logaritmica* nell'esponente $I(t)$ attraverso l'addendo fratto $-(2a_0\mu-a_1\lambda)/(a_0(2a_0t+a_1))$.

Invece, è *possibile* che il caso $\varDelta>0$ risulti significativo *purché* valgano condizioni aggiuntive per la convergenza dell'integrale (2). Infatti, sostituita l'espressione (12.3) nell'Eq. (7), le condizioni suddette risultano espresse dalla coppia di disuguaglianze *simultanee* sufficienti

$$\frac{\lambda}{2a_0}\pm\frac{2a_0\mu-a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}\cancel{-1}>\cancel{-1}\ .$$

equivalente alla condizione (si ricordi che si è assunto $a_0>0$)

$$\left|2a_0\mu-a_1\lambda\right|<\lambda\varDelta^{1/2}\,. \tag{13}$$

Sotto il vincolo (13), il quale implica, inoltre, che debba essere $\lambda>0$, le due radici *distinte* del polinomio $a_0 t^2 + a_1 t + a_2 \equiv A(t)$, annullano *asintoticamente* il termine esponenziale

$$e^{\int \frac{\lambda t + \mu}{a_0 t^2 + a_1 t + a_2} dt}$$

nell'Eq. (9), costituendo l'*unica* coppia appropriata di estremi di integrazione per l'integrale (7),

$$\begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} \equiv \frac{-a_1 \pm (a_1^2 - 4 a_0 a_2)^{1/2}}{2 a_0} \,, \tag{14}$$

e permettendo la rappresentazione più simmetrica

$$I(t) = ln\left(\left| 2 a_0 t + a_1 - \Delta^{1/2} \right|^{\frac{\beta\lambda + \mu}{\Delta^{1/2}}} \cdot \left| 2 a_0 t + a_1 + \Delta^{1/2} \right|^{-\frac{\alpha\lambda + \mu}{\Delta^{1/2}}} \right) ; \tag{15}$$

II. sia assegnato $\eta \equiv i$. Segue che

$$A(t) \equiv -a_0 t^2 + i a_1 t + a_2 \equiv -\frac{1}{4 a_0} (2 a_0 t - i a_1 + \Delta^{1/2})(2 a_0 t - i a_1 - \Delta^{1/2}) \,, \tag{16}$$

con $\Delta \equiv 4 a_0 a_2 - a_1^2$. In questa circostanza, l'Eq. (10) dà luogo ai risultati seguenti in $\mathbb{C}$, a meno di costanti additive arbitrarie di integrazione (comprese quelle originate dall'eventuale polidromìa logaritmica):

- per $\Delta = 0$, si ha che

$$I(t) = \frac{\lambda}{a_0} Ln(2 a_0 t - i a_1) - i \frac{2 a_0 \mu - a_1 \lambda}{a_0 (2 a_0 t - i a_1)} \,. \tag{17.1}$$

Il simbolo Ln indica il *prolungamento principale* in $\mathbb{C}$ del logaritmo naturale definito in $\mathbb{R}$.

L'Eq. (16.1), non fornisce alcuna soluzione per la condizione (9). Le ragioni, queste in $\mathbb{C}$, sono analoghe a quelle indicate, in $\mathbb{R}$, per l'Eq. (12.2).

□

Qui, è utile ricorrere alla forma algebrica del ramo *principale* di $z_2 \mathfrak{Ln}\, z_1$, con $\{z_1, z_2\} \subset \{\mathbb{C} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{C}$, (si veda, e.g., il math-notebook **Logaritmi in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ \\ Funzioni Integrali Logaritmiche Speciali**, P. 8-9) e a un'identità nota per la somma\differenza $tan^{-1} p \pm tan^{-1} q$, con $\{p, q\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$:

- $$z_2 Ln\, z_1 \equiv Ln\, z_1^{z_2} = ln|z_1|^{\mathfrak{Re}\, z_2} - \mathfrak{Im}\, z_2\, arg\, z_1 + i(\mathfrak{Re}\, z_2\, arg\, z_1 + ln|z_1|^{\mathfrak{Im}\, z_2}) \tag{f.1}$$
$$(arg\, z_1 := tan^{-1}(\mathfrak{Im}\, z_1 / \mathfrak{Re}\, z_1) \in (-\pi/2, \pi/2)) ;$$

- $$tan^{-1} p \pm tan^{-1} q = tan^{-1} \frac{p \pm q}{1 \mp pq} \,. \tag{f.2}$$

□

- Per $\Delta \neq 0$, risulta

$$I(t) \equiv \frac{\lambda}{2 a_0} \int \frac{2 a_0 t - i a_1}{a_0 t^2 - i a_1 t - a_2} dt - i \frac{2 a_0 \mu - a_1 \lambda}{2 a_0} \int \frac{dt}{a_0 t^2 - i a_1 t - a_2}$$
$$= (\lambda/(2 a_0))\, Ln\left(a_0 t^2 - i a_1 t - a_2\right) - \hookleftarrow$$
$$\hookrightarrow - i \frac{2 a_0 \mu - a_1 \lambda}{2 a_0} \int \left(\frac{2 a_0 / \Delta^{1/2}}{2 a_0 t - i a_1 - \Delta^{1/2}} - \frac{2 a_0 / \Delta^{1/2}}{2 a_0 t - i a_1 + \Delta^{1/2}} \right) dt$$

$$= (\lambda/(2a_0))\,Ln\!\left(a_0 t^2 - i\,a_1 t - a_2\right) - i\,\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0 \varDelta^{1/2}}\,Ln\!\left(\frac{2a_0 t - i\,a_1 - \varDelta^{1/2}}{2a_0 t - i\,a_1 + \varDelta^{1/2}}\right)$$

$$\equiv Ln\!\left(2a_0 t - i a_1 + \varDelta^{1/2}\right)^{\frac{\lambda}{2a_0} + i\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}} + Ln\!\left(2a_0 t - i\,a_1 - \varDelta^{1/2}\right)^{\frac{\lambda}{2a_0} - i\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}}\,. \quad (17.2)$$

Specificamente,

- quando $\varDelta < 0$, si osserva che

  gli esponenti in entrambi i logaritmi presenti nell'Eq. (17.2) sono *reali*. Infatti, mediante le formule (f.1) e (f.2), P. 5, si può scrivere (lo si verifichi)

$$I(t) \equiv Ln\!\left(2a_0 t - i(a_1 - (-\varDelta)^{1/2})\right)^{\frac{\lambda}{2a_0} + \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}} + Ln\!\left(2a_0 t + i(a_1 + (-\varDelta)^{1/2})\right)^{\frac{\lambda}{2a_0} - \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}}$$

$$= ln\left|2a_0 t - i(a_1 - (-\varDelta)^{1/2})\right|^{\frac{\lambda}{2a_0} + \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}} - i\left(\frac{\lambda}{2a_0} + \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}\right) tan^{-1}\frac{a_1 - (-\varDelta)^{1/2}}{2a_0 t} + \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow + ln\left|2a_0 t - i(a_1 + (-\varDelta)^{1/2})\right|^{\frac{\lambda}{2a_0} - \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}} - \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow - i\left(\frac{\lambda}{2a_0} - \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}\right) tan^{-1}\frac{a_1 + (-\varDelta)^{1/2}}{2a_0 t}$$

$$= ln\!\left(\left(4a_0^2 t^2 + (a_1 - (-\varDelta)^{1/2})^2\right)^{\frac{\lambda}{4a_0} + \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{4a_0(-\varDelta)^{1/2}}} \cdot \left(4a_0^2 t^2 + (a_1 + (-\varDelta)^{1/2})^2\right)^{\frac{\lambda}{4a_0} - \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{4a_0(-\varDelta)^{1/2}}}\right) + \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow + i\left(\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0(-\varDelta)^{1/2}}\,tan^{-1}\frac{(-\varDelta)^{1/2} t}{a_0 t^2 + a_2} - \frac{\lambda}{2a_0}\,tan^{-1}\frac{a_1 t}{a_0 t^2 - a_2}\right). \quad (17.2.1)$$

Appare evidente che la forma (17.2.1) dell'esponente $I(t)$ *non* genera alcuna coppia di divergenze logaritmiche negative e che, pertanto, *non* soddisfa la condizione *minore sufficiente* (9).

Invece,

- quando $\varDelta > 0$,

  l'Eq. (17.2) è esplicitabile nella forma algebrica

$$I(t) \equiv \frac{\lambda}{2a_0} ln\left|2a_0 t - i\,a_1 + \varDelta^{1/2}\right| + \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}\,tan^{-1}\!\left(\frac{a_1}{2a_0 t + \varDelta^{1/2}}\right) + \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow + i\left(\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}} ln\left|2a_0 t - i\,a_1 + \varDelta^{1/2}\right| - \frac{\lambda}{2a_0} tan^{-1}\!\left(\frac{a_1}{2a_0 t + \varDelta^{1/2}}\right)\right) + \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow + \frac{\lambda}{2a_0} ln\left|2a_0 t - i\,a_1 - \varDelta^{1/2}\right| - \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}}\,tan^{-1}\!\left(\frac{a_1}{2a_0 t - \varDelta^{1/2}}\right) - \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow - i\left(\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\varDelta^{1/2}} ln\left|2a_0 t - i\,a_1 - \varDelta^{1/2}\right| + \frac{\lambda}{2a_0} tan^{-1}\!\left(\frac{a_1}{2a_0 t - \varDelta^{1/2}}\right)\right)$$

$$= ln\!\left(((2a_0 t + \varDelta^{1/2})^2 + a_1^2)((2a_0 t - \varDelta^{1/2})^2 + a_1^2)\right)^{\frac{\lambda}{4a_0}} + \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow + \frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{2a_0\Delta^{1/2}}\, tan^{-1}\left(\frac{a_1\Delta^{1/2}}{2a_0^2t^2 - 2a_0a_2 + a_1^2}\right) + \hookleftarrow$$

$$\hookrightarrow + i\left(\frac{2a_0\mu - a_1\lambda}{4a_0\Delta^{1/2}}\, ln\left(\frac{(2a_0t + \Delta^{1/2})^2 + a_1^2}{(2a_0t - \Delta^{1/2})^2 + a_1^2}\right) - tan^{-1}\left(\frac{a_1t}{a_0t^2 - a_2}\right)\right). \quad (17.2.2)$$

Per $a_1 \neq 0$, la rappresentazione (17.2.2) di $I(t)$ *non possiede* alcuna divergenza logaritmica negativa e, pertanto, *non soddisfa* la condizione (13).

D'altra parte, quando $a_1 \equiv 0$, $I(t)$ si riduce alla forma

$$I(t) \equiv ln\left|a_0t^2 - a_2\right|^{\frac{b_1}{2a_0}} + i\,\frac{\mu}{2(a_0a_2)^{1/2}}\, ln\left|\frac{a_0t + (a_0a_2)^{1/2}}{a_0t - (a_0a_2)^{1/2}}\right|. \quad (17.2.2.1)$$

In tale circostanza, si determinano *due* divergenze logaritmiche *negative* in corrispondenza di $t = \pm(a_2/a_0)^{1/2}$ se, valendo la condizione di integrabilità di $\phi(t)$ nell'intervallo compreso tra tali valori di t (cf/c le Eq. (7) e (2)), *coesiste* la coppia di condizioni ulteriori

$$\begin{cases} b_1 > 0\,, \\ \mu \equiv 0\,, \end{cases} \quad (18)$$

soddisfacendo, così, il vincolo (9).
Quindi, la rappresentazione di $I(t)$, *unica* in $\mathbb{R}$ per l'assegnazione del parametro $\eta \equiv i$, è

$$I(t) = \frac{b_1}{2a_0}\, ln\left|a_0t^2 - a_2\right| \equiv \frac{b_1}{2a_0}\, ln|A(t)|, \quad (19)$$

con $b_1 > 0$ e, ovviamente, $a_2 > 0$.

□

Infine, l'integrale *reale* (2) si determina sostituendo l'una o l'altra delle espressioni ammissibili per $I(t)$, Eq. (15) o (19), nell'Eq. (7) per $\phi(t)$.

■

Riepilogo operativo

L'Equazione Differenziale Ordinaria Lineare *di Laplace*

$$(a_0 x + b_0)\, y'' + (a_1 x + b_1)\, y' + (a_2 x + b_2)\, y = 0,$$

caratterizzata dalle costanti $\{a_j, b_j\}_{j=0,1,2} \subset \mathbb{R}$ con $a_0 \in \mathbb{R}^+$ (senza perdita di generalità), *può* avere, sotto certe *condizioni specifiche*, un integrale particolare *reale* della forma

$$y_1(x) := \int_\alpha^\beta e^{\eta x t} \phi(t)\, dt, \tag{20}$$

dove, per definitezza, si assume $\alpha < \beta$, ϕ è una funzione opportuna mentre, al parametro η, si assegnano i valori 1 o i nel modo prescritto seguente:

I. sia $\Delta := a_1^2 - 4 a_0 a_2 > 0$.

Preso $\eta = 1$, sse i numeri $\lambda := (a_0 b_1 - a_1 b_0)/a_0$, con $\lambda > 0$ e $\mu := (a_0 b_2 - a_2 b_0)/a_0$ verificano la disuguaglianza $|2 a_0 \mu - a_1 \lambda| < \lambda \Delta^{1/2}$, allora, l'integrale particolare cercato della forma (20) si scrive esplicitamente

$$y_1(x) = \int_{t=\alpha}^\beta e^{\left(x + \frac{b_0}{b_0}\right)t} (t-\alpha)^{-\frac{\alpha\lambda+\mu}{\Delta^{1/2}} - 1} (\beta - t)^{\frac{\beta\lambda+\mu}{\Delta^{1/2}} - 1} dt, \tag{21}$$

dove α e β sono le radici *distinte* del polinomio quadratico $A(t) \equiv a_0 t^2 + a_1 t + a_2$;

II. sia $\Delta < 0$.

Preso $\eta = i$, *può* esistere, in $\mathbb{R}$, un integrale particolare della forma (20) sse *coesistono* i vincoli *simultanei* ulteriori seguenti:

$$\begin{cases} a_1 \equiv 0 \quad (\Rightarrow a_2 > 0), \\ b_1 > 0, \\ \mu \equiv 0. \end{cases}$$

In tale circostanza, l'integrale particolare cercato è dato da

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{t=\alpha}^\beta e^{i\left(x + \frac{b_0}{a_0}\right)t} (a_2 - a_0 t^2)^{\frac{b_1}{2a_0} - 1} dt \\ &\equiv \int_{t=\alpha}^\beta (a_2 - a_0 t^2)^{\frac{b_1}{2a_0} - 1} cos((x + b_0/a_0)t)\, dt + \\ &\quad + i \int_{t=\alpha}^\beta (a_2 - a_0 t^2)^{\frac{b_1}{2a_0} - 1} sin((x + b_0/a_0)t)\, dt. \end{aligned} \tag{22}$$

dove, gli estremi di integrazione $\beta = (a_2/a_0)^{1/2}$ e $\alpha = -\beta$ sono le radici *opposte* del polinomio quadratico $A(t) \equiv -a_0 t^2 + a_2$. Poiché si è assunto $a_0 > 0$, risulta $A(t) > 0 \ \forall\, t \in (\alpha, \beta)$.

■

Esempio 1

L'*Equazione Ipergeometrica Confluente* (o *di Kummer*),

$$xy'' + (c - x)y' - \kappa y = 0, \tag{23}$$

con $\{c, \kappa\} \in \mathbb{R}$, appartiene alla classe delle *Equazioni di Laplace*. Per essa, si ha $\{a_0, a_1, a_2\} \equiv$ $\equiv \{1, -1, 0\}$, $\{b_0, b_1, b_2\} \equiv \{0, c, -\kappa\}$, $\lambda = c$ e $\mu = -\kappa$. Inoltre, risulta $\Delta = 1\ (>0)$.

In tal caso, si assegna il parametro $\eta = 1$, originando il polinomio quadratico $A(t) \equiv t^2 - t$, dalle cui radici *ordinate*, $0\ (\equiv \alpha)$ e $1\ (\equiv \beta)$, si calcolano

$$-(\lambda\alpha + \mu)/\Delta^{1/2} = \kappa \quad \text{e} \quad (\lambda\beta + \mu)/\Delta^{1/2} = c + \kappa .$$

Quindi, *se avviene* che $|-2\kappa - c| < c$, i.e., se $0 < \kappa < c$, l'*Equazione Ipergeometrica Confluente*, dall'Eq. (18), possiede la soluzione particolare reale (e.g., v. [1])

$$y_1(x) = \int_{t=0}^{1} e^{xt} t^{\kappa-1} (1-t)^{c+\kappa-1} dt = B(\kappa, c+\kappa)\, {}_1F_1(\kappa, c+2\kappa; x)$$
$$\equiv \frac{\Gamma(\kappa)\Gamma(c+\kappa)}{\Gamma(c+2\kappa)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\kappa)_n}{(c+2\kappa)_n n!} x^n . \tag{24}$$

È noto che ${}_1F_1$, la *Funzione Ipergeometrica Confluente*, è rappresentabile come serie di potenze, convergente in tutto $\mathbb{R}$; $(q)_n := q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)$, con $\{q, n\} \in \{\mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\} \times \mathbb{Z}^+$ e $(q)_0 := 1$ è il *Simbolo di Pochhammer* di ordine n e di argomento q.

Esempio 2

Procedendo in modo analogo all'**Esempio 1**, l'*Equazione Differenziale di Laguerre*,

$$xy'' + (\nu + 1 - x)y' + \kappa y = 0, \tag{25}$$

con $\{\nu, \kappa\} \subset (-1, +\infty) \times \mathbb{R}$, importante nella soluzione della parte *radiale* dell'*equazione d'onda di Schrödinger* per l'atomo idrogenoide stazionario, ha una soluzione particolare del tipo (19) sse è soddisfatta la condizione $|2\kappa + \nu + 1| < \nu + 1$, i.e., sse $0 < -(\kappa + 1) < \nu$. Tale soluzione si scrive

$$y_1(x) = \int_{t=0}^{1} e^{xt} t^{-\kappa-1} (1-t)^{\nu+\kappa} dt = B(-\kappa, \nu+\kappa)\, {}_1F_1(-\kappa, \nu; x)$$
$$\equiv \frac{\Gamma(-\kappa)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\kappa)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\kappa)_n}{(\nu)_n n!} x^n , \tag{26}$$

in termini della *Funzione Beta* di Euler e della rappresentazione in serie di potenze della *Funzione Ipergeometrica Confluente*.

Esempio 3

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy'' + (2\nu + 1)y' + xy = 0, \tag{27}$$

con $\nu \in (-1/2, +\infty)$.

Si tratta di un'equazione ordinaria della $\mathcal{L}$-famiglia (Laplace), per la quale, $\{a_0, a_1, a_2\} \equiv \{1, 0, 1\}$ e $\{b_0, b_1, b_2\} \equiv \{0, 2\nu+1, 0\}$. Poiché $\Delta = -4 < 0$, $a_1 \equiv 0$, $b_1 \equiv 2\nu+1 > 0$ e $\mu \equiv 0$, si assegna $\eta \equiv i$, così che un'integrale particolare si scrive, secondo l'Eq. (22), come

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{t=-1}^{1} e^{ixt}(1-t^2)^{(2\nu+1)/2-1} dt \\ &= \int_{t=-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} cos\,(xt)\, dt + i \underbrace{\int_{t=-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} sin\,(xt)\, dt}_{\equiv 0}. \end{aligned}$$

Come è prevedibile, $\mathfrak{Im}\, y_1(x) \equiv 0$, risultando dall'integrazione in un intervallo simmetrico vs. l'origine di una funzione *reale*, *dispari vs.* t.
Mediante il cambiamento $t := cos\,\varphi$ della variabile di integrazione, da cui segue la trasformazione $\int_{-1}^{1} (dt) \mapsto \int_{-1}^{1} (-\,sin\,\varphi\, d\varphi)$ dell'operatore integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{\varphi=0}^{\pi} (cos\,(x\, cos\,\varphi))\,(sin\,\varphi)^{2\nu}\, d\varphi \\ &= \pi^{1/2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \Gamma(\nu+1/2)\, J_\nu(x). \end{aligned} \tag{28}$$

dove, $J_\nu(x)$ è la *funzione di Bessel* di 1° tipo e di ordine *reale* $\nu > -1/2$ (si veda, e.g., [2]).

Osservazione

Un *secondo* integrale particolare dell'Eq. (1), indicato con $y_2(x)$, che sia linearmente indipendente da $y_1(x)$ e, dunque, sufficiente per costruire l'integrale *generale* come combinazione lineare di entrambi, è *sempre* esprimibile formalmente, e.g., con la formula classica di *Lagrange-Picard*

$$y_2(x) \equiv y_1(x) \int_{t=x_0}^{x} (y_1(t))^{-2} e^{-\int_{u=x_0}^{t} p(u)du}\, dt, \tag{29}$$

nella quale, si ha

$$p(u) \equiv \frac{a_1 u + b_1}{a_0 u + b_0}\ . \tag{30}$$

Comunque, quando non esista un integrale di tipo integro-esponenziale o si debba affrontare un problema di Cauchy, una strategia praticabile – forse, l'*unica* – per l'integrazione generale (esatta) o per il controllo esplicito dei primi addendi delle espansioni di $y_1(x)$ e di $y_2(x)$ in serie di potenze resta quella dell'applicazione del *metodo di Frobenius-Fuchs*, esposto dettagliatamente, e.g., nel math-notebook [17], P. 11-15.

Infine, nei casi di … estrema e cupa disperazione, c'è sempre il soccorso … salvifico dell'Analisi Numerica (algoritmi di Romberg, Regola '3/8' di Simpson, Newton-Cotes, etc.).

■■■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

Riferimenti testuali generali

[1] TEMME, N. M., *Special Functions*: *An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);

[2] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., CH. 13, ACADEMIC PRESS (2013);

[3] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., CH.S 1, 2, 4, 5, PRENTICE-HALL, INC. (1976);

[4] N. N. LEBEDEV, *Special Functions and Their Applications*, P. 114, Eq. (5.10.2), DOVER PUBNS., INC. (1972);

[5] BENDER, C. M. - ORSZAG, S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, CH.S 1, 3, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1978).

[6] GRADSHTEYN, I. S. - RYZHIK, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, 7TH ED., ACADEMIC PRESS (2007);

[7] INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations*, 7TH ED., DOVER PUBNS., INC. (REV. 1985);

[8] INCE, E. L., *Integration of Ordinary Differential Equations*, 2ND ED., OLIVER & BOYD, LTD. (1952; REPR. 1969);

[9] CODDINGTON, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, PRENTICE-HALL (1961);

[10] HILLE, E., *Analysis*, VOL. **II**, BLAISDELL PUBL. CO. (1966);

[11] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, VOL. **2**, CAP. 4, ZANICHELLI (-MASSON) (RIST. 1998);

[12] GIUSTI, E., *Analisi Matematica*, VOL. **2**, CAP. 3, BOLLATI-BORINGHIERI (1989);

[13] APOSTOL, T. M., *Calculus*, 2ND ED., VOL. **2**, CAPP. 6 & 7, JOHN WILEY & SONS, INC. (1969).

Esercizi e applicazioni

[14] BONONCINI, V. E., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **2**, 10A ED., C.E.D.A.M. (1974);

[15] SPIEGEL, M. R., *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1971);

[16] SALSA, S. - SQUELLATI, A., *Esercizi di Analisi Matematica 2*, VOL. **3**, ZANICHELLI (-MASSON) (1994);

[17] GIUSTI, E., *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, VOL. **2**, BOLLATI-BORINGHIERI (1994);

[18] PICONE, M. - MIRANDA, C., *Esercizi di Analisi Matematica*, 3A ED., TUMMINELLI (1957);

[19] FINZI, B. - MORRA, F., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **II**, 2A ED., TAMBURINI (1970);

[20] AYRES, F., *Differential Equations*, CH.S 18 & 19, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1967);

[21] BRONSON, R. - COSTA, G. B., *Differential Equations*, 3RD ED., SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (2006);

[22] BRONSON, R., *2500 Solved Problems in Differential Equations*, SCHAUM'S SOLVED PROBLEMS SERIES, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1988);

[23] L'AUTORE (CM) [math-notebook PDF],
Equazioni Differenziali Ordinarie Lineari del 2º ordine a coefficienti variabili - Metodi di integrazione.

■■■